EPITA

S1 S2

Mathématiques

Les fonctions usuelles

Présentation

Ce support regroupe toutes les fonctions usuelles que vous devez connaitre par cœur !

Il vous servira tout au long de l'année, voir l'année prochaine !

Pour chacune d'entre elles, vous y trouvez l'allure de la courbe, des propriétés algébriques de la fonction, des valeurs de référence etc...

Table des matières

1 La fonction valeur absolue **2**

2 La fonction carrée **3**

3 La fonction racine carrée **4**

4 La fonction inverse **5**

5 La fonction exponentielle **6**

6 La fonction logarithme **7**

7 Les fonctions cosinus et sinus **8**

8 La fonction tangente **9**

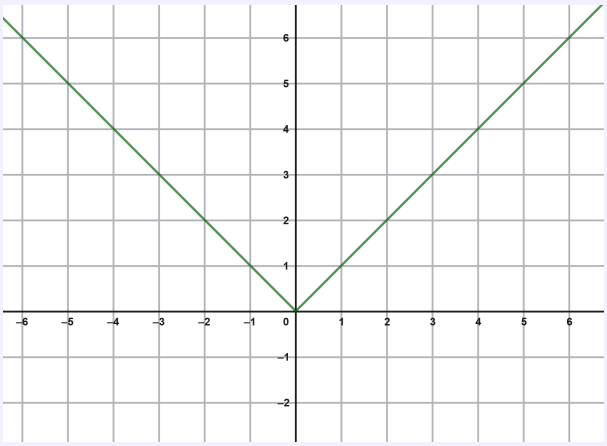
1 La fonction valeur absolue

Présentation

La fonction **valeur absolue** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

On a $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

Sa courbe représentative est la suivante :



Propriétés

1. $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $|-a| = |a|$ (parité de la fonction)
2. $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $|a| = 0 \iff a = 0$
3. $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|a \times b| = |a| \times |b|$ et, si $b \neq 0$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

$|a + b| \neq |a| + |b|$.

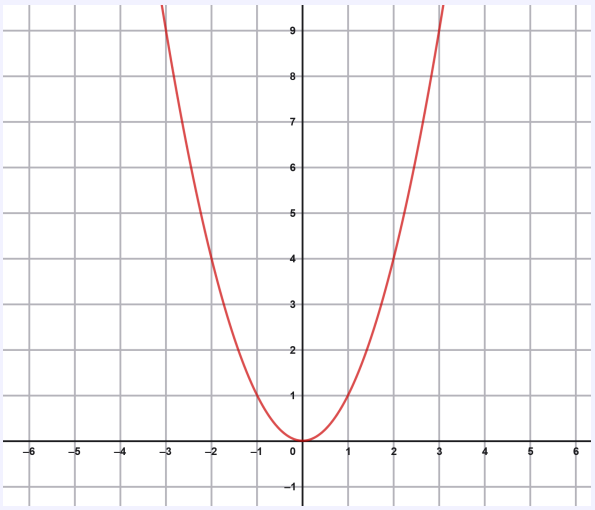
En revanche, pour tous réels a et b, $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire) ! !

2 La fonction carrée

Présentation

La fonction **carrée** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Sa courbe représentative est la suivante :



Propriétés

1. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ (-a)^2 = a^2$ (parité de la fonction)
2. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a^2 = 0 \iff a = 0$
3. $\forall\, (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ (a \times b)^2 = a^2 \times b^2$ et, si $b \neq 0$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

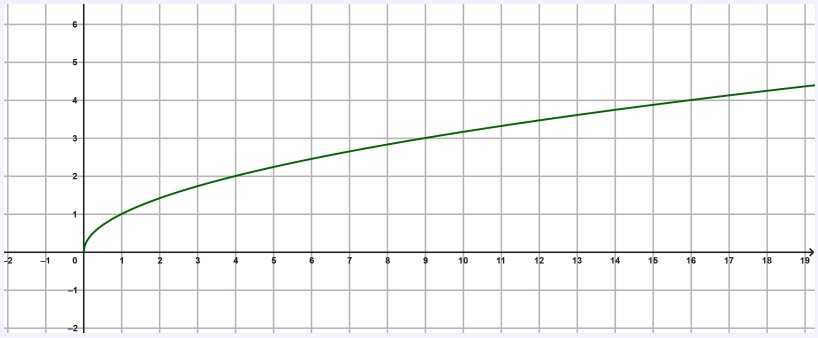
$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$!!

3 La fonction racine carrée

Présentation

La racine carrée d'un réel positif a est le réel positif dont le carré est a. On le note $\sqrt{a}$. On a, pour tout réel positif, $(\sqrt{a})^2 = a$
La fonction **racine carrée** est définie sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Sa courbe représentative est la suivante :



Propriétés

1. $\forall\, a \in \mathbb{R}^+$, $(\sqrt{a})^2 = a$
2. $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$
3. $\forall\, (a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et, si $b \neq 0$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$



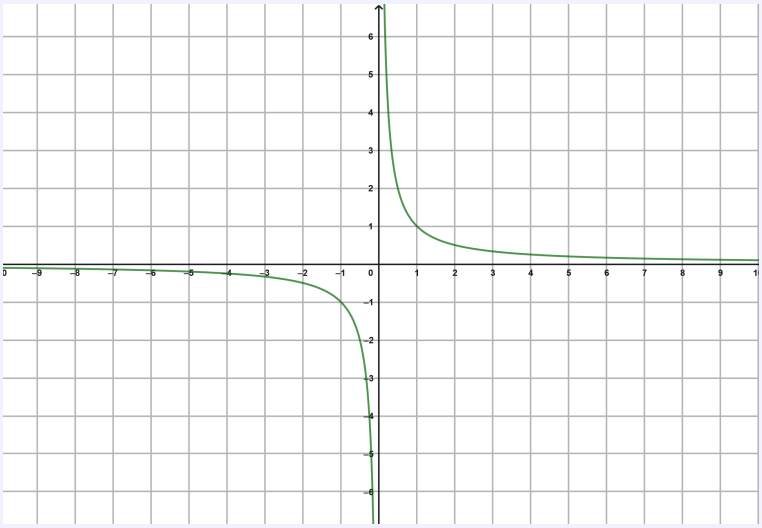
$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$!!

4 La fonction inverse

Présentation

La fonction **inverse** est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est la suivante :



Propriétés

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$



$\dfrac{1}{a+b} \neq \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$!!

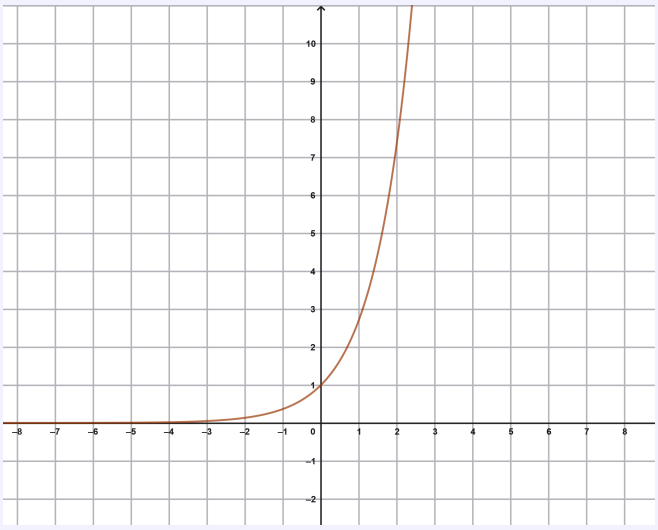
5 La fonction exponentielle

Présentation

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.

La fonction **exponentielle** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

Sa courbe représentative est la suivante :



Propriétés

1. $e^0 = 1$ et e^1 se note e.
2. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ e^a > 0$
3. $\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ e^{a+b} = e^a \times e^b$
4. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
5. $\forall\, (a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ (e^a)^n = e^{na}$

Une exponentielle ne s'annule jamais!!

6 La fonction logarithme

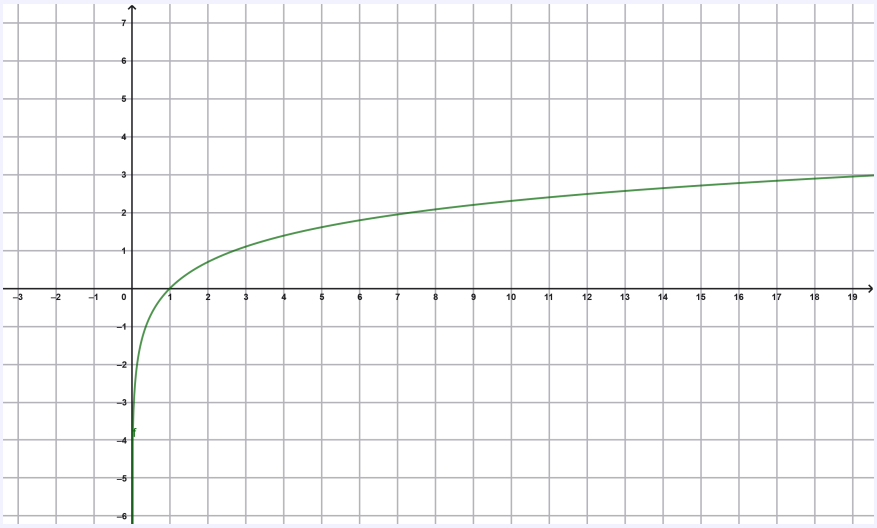
Présentation

On appelle logarithme népérien d'un réel a strictement positif l'unique solution de l'équation $e^x = a$ d'inconnue x. On note $x = \ln(a)$.

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est la fonction

$$\ln : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$$

Sa courbe représentative est :



Propriétés

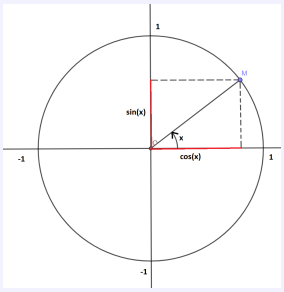
1. $\forall\, x > 0$ et $\forall\, y \in \mathbb{R} \quad (e^y = x \iff y = \ln(x))$
2. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}$, $e^{\ln(x)} = x$
4. $\forall\, a \in]0,1[$, $\ln(a) < 0$ et $\forall\, a > 1$, $\ln(a) > 0$
5. $\forall\, (a,b) \in]0,+\infty[^2$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
6. $\forall\, a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ et $\forall\, (a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
7. $\forall\, (a,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$



$\ln(a+b) \neq \ln(a) \times \ln(b)$

7 Les fonctions cosinus et sinus

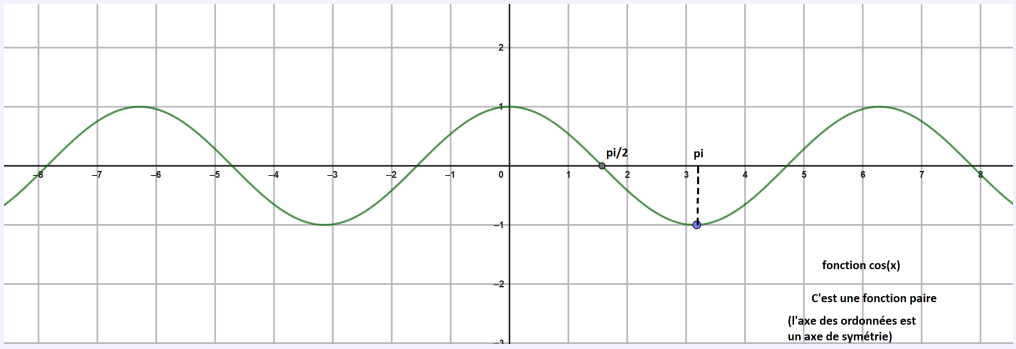
Cercle trigonométrique



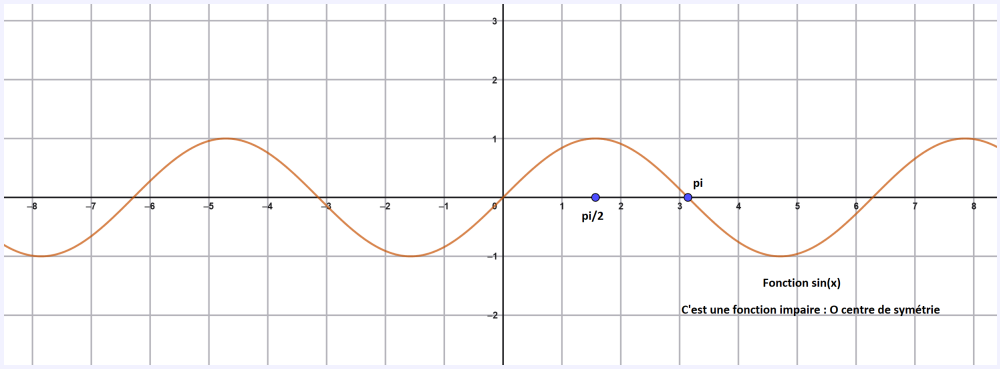
Valeurs usuelles

angle x (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Allure de cosinus



Allure de sinus



8 La fonction tangente

Présentation

La fonction **tangente** est $\tan : x \longmapsto \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Sa courbe représentative est :

